NOVATEUR PUBLICATIONS
INTERNATIONAL JOURNAL OF INNOVATIONS IN ENGINEERING RESEARCH AND TECHNOLOGY
[IJIERT] ISSN: 2394-3696 Website: ijiert.org
VOLUME 9, ISSUE 11, Nov. -2022

ON GENERALIZED DERIVATIONS OF JORDON ALGEBRAS

Voxobov Fazliddin Faxriddinjon o‘g‘li
Qo‘qon davlat pedagogika instituti

ANNOTATION

In the present article the concept of generalized derivations of Jordan algebras is introduced and the general properties of generalized derivations are studied. In particular, invariants are constructed in Jordan algebras using generalized derivations. Also, a description, for some values of the parameters α, β, γ, of the sets of all (α, β, γ) -derivations of Jordan algebrasis given.

Key words: Vector space, Jordon algebra, linear map, derivation, generalized derivation.

1-определение. Жорданова алгебра J это- удовлетворяющее условий

$$a \cdot b = b \cdot a, a, b \in J,$$

$$(a^2 \cdot b) \cdot a = a^2 \cdot (b \cdot a), a, b \in J.$$

$J \times J \to J -$ линейное отражение векторного пространства V над полем F

Определение (α, β, γ)- дифференцирования Жордановых алгебр можно написать следующим образом :

2-определение**.** Пусть $(J, \cdot)$ – Жорданова алгебра.

Линейный оператор $d \in \mathrm{End}(J)$ J называется (α, β, γ) – дифференцированием, если для всех $x, y \in J$ элементов существуют такие $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$, выполняющее следующее условие

$$\alpha d(x \cdot y) = \beta(d(x) \cdot y) + \gamma\big(x \cdot d(y)\big).$$

Множества всех (α, β, γ) – дифференцированиях J Жордановых алгебр обозначаем через $\mathrm{Der}_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J)$.

Данное множество определяется по следующему:

$$\mathrm{Der}_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J) = \{d \in \mathrm{End}(J) \colon \alpha d(x \cdot y) = \beta(d(x) \cdot y) + \gamma\big(x \cdot d(y)\big), x, y \in J\}.$$

Где множество $\mathrm{Der}_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J)$ является подпространством векторного пространства $\mathrm{End}(J)$.

Теорема. Пусть J – Жорданова алгебра с единичным элементом и $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{F}$. Тогда векторное пространство $\mathrm{Der}_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J)$ имеет следующие виды.

1. $\mathrm{Der}_{(1,1,1)}(J) = \mathrm{Der}(J)$, где $\mathrm{Der}(J)$ – алгебра Ли всех дифференцированиях Жордановой алгебры J;
2. Множеств $\mathrm{Der}_{(1,1,0)}(J) \subseteq \mathrm{End}(L)$ и $\mathrm{Der}_{(1,1,0)}(J)$

можно тождественно выравнивать всех идемпотентных элементов йордановой алгебры $\mathrm{Id}(J)$

$$p \in \mathrm{Id}(J), \qquad d(x) = p \cdot x, \;\; x \in J$$

3. $\mathrm{Der}_{(1,1,-1)}(J) \subseteq \mathrm{Der}_{(1,0,0)}(J) \equiv 0$.
4. $\mathrm{Der}_{(0,1,1)}(J) \equiv 0$.
5. Множество $\mathrm{Der}_{(0,1,-1)}(J)$ можно тождественно выравнивать с множеством $Z_o(J) = \{a \in J \mid (b \cdot a) \cdot c = b \cdot (a \cdot c), \;\; b, c \in J\}$

$$a \in Z_o(J), \;\; d(x) = a \cdot x, \;\; x \in J.$$

6. $\mathrm{Der}_{(0,1,0)}(J) \equiv 0$;
7. Если $\delta \neq 1$, тогда $\mathrm{Der}_{(\delta,1,0)}(J) \equiv 0$.

Доказательство**.** Из равенства $d(x \cdot y) = d(x) \cdot y, x, y \in J$ получаем $d(x) = d(e) \cdot x, \;\; x \in J$. Тогда, так как Жорданова алгебра J коммутативна,

$$d(x\cdot y)=d(e)\cdot(x\cdot y)=d(x)\cdot y=d(y)\cdot x,\quad x,y\in J$$

и

$$d(x\cdot y)=d(x\cdot e)\cdot y=(d(e)\cdot x)\cdot y=(d(e)\cdot y)\cdot x,\quad x,y\in J.$$

Отсюда $d(e)$ – центральный элемент. А также

$$d(e)=d(e\cdot e)=d(e)\cdot d(e),$$

т.е. элемент $d(e)$ идемпотентный элемент.

Наоборот , для каждого центрального идемпотентного элемента p Жордановой алгебры J Отражение $d(x)=p\cdot x,\ x\in J$, принадлежит множеству $Der_{(1,1,0)}(J)$ и va поэтому множества $Der_{(1,1,0)}(J)$ можно тождественно выравнивать множестом всех идемпотентных элементов Жордановой алгебры J.

3. По определению $Der_{(1,1,-1)}(J)=\{d\in End(J)\,|\,d(x\cdot y)=d(x)\cdot y-x\cdot d(y),\ x,y\in J\}$. Имеет место следующие равенства:

$$d(x)=d(e)\cdot x-d(x),\qquad x,y\in J,$$

$$d(x\cdot y)=\big(d(e)\cdot x-d(x)\big)\cdot y-x\cdot\big(d(e)\cdot y-d(y)\big)=$$

$$(d(e)\cdot x)\cdot y-d(x)\cdot y-x\cdot(d(e)\cdot y)+x\cdot d(y)=$$

$$(d(e)\cdot x)\cdot y-x\cdot(d(e)\cdot y)-d(x\cdot y),\qquad x,y\in J,$$

$$d(e)=d(e\cdot e)=d(e)\cdot e-e\cdot d(e)=0.$$

Отсюда

$$d(x\cdot y)=-d(x\cdot y)=0,\ \ x,y\in J$$

и

$$d(e\cdot x)=-d(e\cdot x)=d(x)=0,\ \ x\in J.$$

Из последнего равенства $Der_{(1,1,-1)}(J)\equiv 0$.

4. По определению множество $Der_{(0,1,1)}(J)$ определяется следующим образом:

$$Der_{(0,1,1)}(J)=\{d\in End(J)\,|\,d(x)\cdot y=-x\cdot d(y),x,y\in J\}.$$

Тогда $d(e)\cdot x=-e\cdot d(x)=-d(x),\ x\in J,\ d(e)\cdot e=-e\cdot d(e),\ d(e)=0.$

Отсюда

$$d(x)=e\cdot d(x)=-d(e)\cdot x=0,\qquad x\in J.$$

Значит, $Der_{(0,1,1)}(J)\equiv 0$.

5. Как выше, для множества $Der_{(0,1,-1)}(J)=\{d\in End(J)\,|\,d(x)\cdot y=x\cdot d(y),x,y\in J\}$ можно получить равенства

$$d(e)\cdot x=e\cdot d(x)=d(x),\ \ x\in J,$$

$$d(x)\cdot y=(d(e)\cdot x)\cdot y=\big(x\cdot d(e)\big)\cdot y=x\cdot d(y)=x\cdot(d(e)\cdot y),x,y\in J.$$

Теперь из множества

$$Z_o(J)=\{a\in J\,|\,(b\cdot a)\cdot c=b\cdot(a\cdot c),\ \ b,c\in J\}$$

возмем произвольный элемент $a\in Z_o(J)z$. Покажем что отражение $d(x)=a\cdot x,\ \ x\in J$.

Принадлежит множеству $Der_{(0,1,-1)}(J)$.

$$d(x)\cdot y=(a\cdot x)\cdot y=(x\cdot a)\cdot y=x\cdot(a\cdot y)=x\cdot d(y),\ \ x,y\in J.$$

6. По определению, множества $Der_{(0,1,0)}(J)$ определяется по следующему:

$$Der_{(0,1,0)}(J)=\{d\in End(J)\,|\,d(x)\cdot y=0,x,y\in J\}.$$

Имеет место следующие равенства:

$$d(x)=d(x)\cdot e=0,\qquad d(e)=d(e)\cdot e=0,\qquad x\in J.$$

Отсюда$Der_{(0,1,0)}(J)\equiv 0$.

7. И в конце , из множества

$$\mathrm{Der}_{(\delta,1,0)}(J) = \{d \in \mathrm{End}(J) \mid \delta d(x \cdot y) = d(x) \cdot y, \quad x, y \in J\}$$

можно получить равенства

$$\delta d(x) = \delta d(x \cdot e) = d(x) \cdot e = d(x), \quad x \in J$$

$$\delta d(x) = d(x), \qquad (\delta - 1)d(x) = 0, \delta \neq 1, d(x) = 0 \quad x \in J.$$

Так, как

$$0 = (\delta - 1)^{-1} 0 = (\delta - 1)^{-1}(\delta - 1)d(x) = d(x).$$

Значит, $\mathrm{Der}_{(\delta,1,0)}(J) \equiv 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУР

1. Leger G., Luks E. Generalized Derivations of Lie algebras, J. Algebra, 2000, 228,165-203.
2. Hartwig J., Larsson D.,Silvestrov S. Deformation of Lie algebras using (σ, τ)-derivation. Journal of algebra,2006, 38 (2) 109-138.
3. Hrivnak J.Invariants of Lie algebras. PhD Thesis, Faculty of Nuclear Science andPhysical Engineering, Czech Technical University, Prague, 2007.
4. Novotny P.,Hrivnak J. On (α, β, γ)-derivation of Lie algebras and correspondinginvariant functions. J. Geom. Phys.,2008, 58, 208-217.
5. Rakhimov I. S., Said Husain Sh. K.,Abdulkadir A. On Generalized derivationsof finite dimensional associative algebras. FEIIC International journal of Engineering andTechnology,2016, 13 (2) 121-126.
6. Fiidow M.A., Rakhimov I.S., Said Husain Sh.K., Basri W. (α, β, γ)-Derivations of diassociativealgebras. Malaysian Journal Of Mathematical ciences, 2016, 10101-126.
7. McCrimmonK.A taste of Jordan algebras.Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo, 2004, pp. 562.
8. Hanche-OlcenH., StörmerE.Jordan operator algebras.Boston etc: Pitman Publ. Inc.,1984, pp. 183.
9. Mamazhonov, M., & Shermatova, K. M. (2017). ON A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION IN A CONCAVE HEXAGONAL DOMAIN. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, 16(1), 11-16.
10. Мамажонов, М., & Шерматова, Х. М. (2017). Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области. Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки, (1 (17), 14-21.
11. Акбаров, У. Й., and Ф. Б. Бадалов. "Эшматов Х. Устойчивость вязкоупругих стержней при динамическом нагружении." Прикл. мех. и тех. физ 4 (1992): 20-22.
12. Mamazhonov, M., and Kh B. Mamadalieva. "STATEMENT AND STUDY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THIRD ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION OF TYPE∂(Lu)/∂ x= 0 IN A PENTAGONAL DOMAIN." Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences 12.1 (2016): 27-34.
13. Абдикаримов, Рустамхон А., Мухсин М. Мансуров, and Умматали Й. Акбаров. "Численное исследование флаттера вязкоупругого жестко-защемленного стержня с учетом физической и аэродинамической нелинейностей." Вестник РГГУ. Серия: Информатика. Информационная безопасность. Математика 3 (2019): 94-107.
14. Abdikarimov, Rustamxon A., Mukhsin M. Mansurov, and Ummatali Y. Akbarov. "Numerical study of a flutter of a viscoelastic rigidly clamped rod with regard for the physical and aerodynamic nonlinearities." ВЕСТНИК РГГУ 3 (2019): 95.

15. Abdikarimov, Rustamxon A., Mukhsin M. Mansurov, and Ummatali Y. Akbarov. "Numerical study of a flutter of a viscoelastic rigidly clamped rod with regard for the physical and aerodynamic nonlinearities." ВЕСТНИК РГГУ 3 (2019): 95.
16. Formanov, Sh K., and Sh Jurayev. "On Transient Phenomena in Branching Random Processes with Discrete Time." Lobachevskii Journal of Mathematics 42.12 (2021): 2777-2784.
17. Хусанбаев, Я. М., and Х. К. Жумакулов. "О сходимости почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией к детерминированному процессу." O ‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI (2017): 142.
18. Мамажанов М., Шерматова Х.М., Мамадалиева Х.Б. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области. Актуальные научные исследования в современном мире. ISCIENCE.IN.UA, Переяслав-Хмельницкий, 2017, вып.2(22), стр. 148-151.
19. Мамажонов, М., and Хосиятхон Ботировна Мамадалиева. "Постановка и изучение некоторых краевых задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида ∂∂x(Lu)=0 в пятиугольной области." Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки 1 (12 (2016): 32-40.
20. Abdikarimov, Rustamxon A., Mukhsin M. Mansurov, and Ummatali Y. Akbarov. "Numerical study of a flutter of a viscoelastic rigidly clamped rod with regard for the physical and aerodynamic nonlinearities." ВЕСТНИК РГГУ 3 (2019): 95.